المتميــز

في

الرياضيات

الفصل الدراسي الاول

الصف الثالث الإعدادي

إعداد:

أ / محمــد ربيــع

01158509989

حاصل الضرب الديكارتي

(٣ ، ٥) يسمى زوج مرتب

مسقط أول ← ، ← مسقط ثاني

(٣ ، ٥) ≠ (٥ ، ٣)

{٣ ، ٥} ← مجموعة

{٣ ، ٥} = {٥ ، ٣}

* يمكن تكرار العنصر في الزوج المرتب (٥ ، ٥) ولا يمكن تكرار العنصر في المجموعة {٥ ، ٥} ✗

⟸ تساوي زوجين مرتبين:

إذا كان (أ ، ب) = (٢ ، ٣) فإن

الأول = الأول ، الثاني = الثاني

أ = ٢ ، ب = ٣

* أكمل:

① إذا كان (أ + ١ ، ٥) = (٣ ، ب − ١)

فإن أ = ... ، ب = ...

② إذا كان (س^٢ ، ٢٧) = (٩ ، ص^٣)

فإن س = ... ، ص = ...

مثال①: أوجد قيمة س ، ص في كل مما يأتي

① (س + ١ ، ٥) = (٣ ، ص − ١)

الحل

② (س^٣ ، √ص) = (١ ، ٤)

الحل

مثال②: إذا كانت (س − ١ ، ١١) = (٨ ، ص + ٣)

فأوجد قيمة √(س + ٢ص)

الحل

⇐ حاصل الضرب الديكارتي

س $\overset{\text{ضرب}}{\times}$ ص = {(أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ ص}

هو مجموعة جميع الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول ∈ س ومسقطها الثاني ∈ ص

* {٢} $\overset{\text{ضرب}}{\times}$ {٣} = {(٢ ، ٣)}

* {٣} × {٢} = {(٣ ، ٢)}

مثال ① : إذا كانت س = {أ ، ب} ، ص = {١ ، ٢ ، ٣} فأوجد
① س × ص ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني ② ص × س ومثلها...

الحل

ملاحظات :

① س × ص ≠ ص × س

② س × ∅ = ∅ × س = ∅

③ س × س = س² وتقرأ س اثنين

④ يرمز لعدد عناصر المجموعة بالرمز (ن) مثلاً س = {أ ، ب} فإن ن(س) = ٢

⑤ س مجموعة س ← عنصر هام جداً

⑥ ن(س × ص) = ن(س) × ن(ص)

مثلاً إذا كانت ن(س) = ٥ ، ن(ص) = ٣ فإن ن(س × ص) = ٥ × ٣ = ١٥

⑦ ن(س²) = [ن(س)]²

مثلاً إذا كانت ن(س) = ٣ فإن ن(س²) = (٣)² = ٩

⑧ ن(س × ∅) = صفر

⑨ س × ص = ص × س إذا كانت س = ص

مثال ② إذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {٧ ، ٨} فأوجد
① س × ص ومثله ② ص × س ومثله ③ س² ④ ن(س × ص)

الحل

أكمل:

١) إذا كان ن(س) = ٢ ، ن(ص) = ٥
فإن ن(س × ص) = ...

٢) إذا كان ن(س × ص) = ١٥ ،
ن(ص) = ٥ فإن ن(س) = ...

٣) إذا كان ن(س) = ٥ فإن
ن(س²) = ...

٤) إذا كان ن(ص²) = ٩ فإن
ن(ص) = ...

٥) إذا كان ن(س) = ٢ ، ص = {٥ ، ٦}
فإن ن(س × ص) = ...

٦) إذا كانت س = {٧} فإن
س² = ...
ن(س²) = ...

٧) إذا كانت س = {٣} ،
فإن س² = ...

٨) إذا كان ن(س²) = ٩ ، ن(س × ص) = ٦
فإن ن(ص²) = ...

٩) إذا كانت س = {٢} ، ص = {٣}
فإن س × ص = ...

١٠) إذا كان (٣ ، ٥) ∈ س × ص
فإن ٣ ∈ ... ، ٥ ∈ ...

١١) إذا كان (٤ ، ٧) ∈ ص × س
فإن ٤ ∈ ... ، ٧ ∈ ...

١٢) إذا كان (٥ ، ٣) ∈ س × ص
فإن (٣ ، ٣) ∈ ...

١٣) إذا كان (٣ ، ٥) ∈ {٣ ، ٦} × {ب ، ٨}
فإن ب = ...

١٤) ن(س × ∅) = ...

مثال ①:
إذا كانت س × ص = {(١،٢)، (١،٣)، (١،٤)، (٥،٢)، (٥،٣)، (٥،٤)}
فأوجد
① س ، ص
② س²
③ ن(ص²)

الحل

مثال ③: إذا كان س × ص = {(١،١)، (١،٣)، (١،٥)}
فأوجد
① س ، ص
② ص × س
③ ص²

الحل

⇐ تذكر ∪ اتحاد ∩ تقاطع − فرق

س ∪ ص ← كل اللي في س وص من غير تكرار

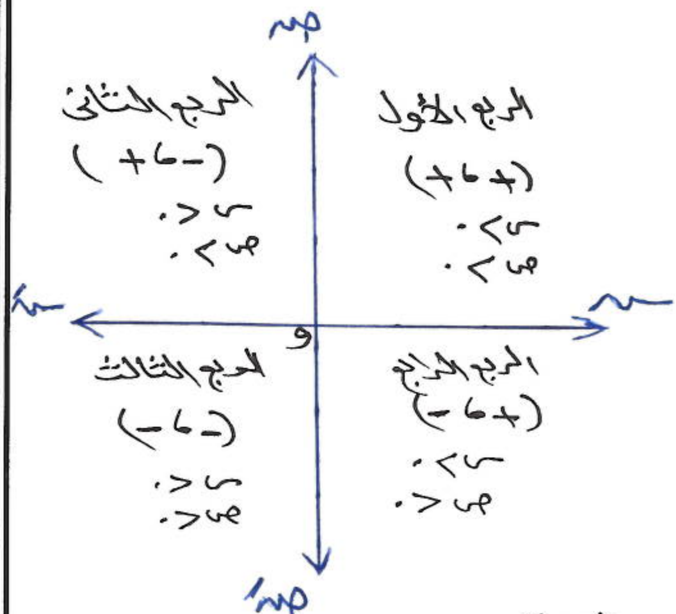
س ∩ ص نأخذ المشترك في س، ص

س − ص نأخذ اللي موجود في س ومش موجود في ص

ص − س نأخذ اللي موجود في ص ومش موجود في س

مثال ②: إذا كانت س = {٣، ٤}
ص = {٤، ٥} ، ع = {٦، ٥}
فأوجد ① س × (ص ∩ ع)
② (س − ص) × ع
③ (س − ص) × (ص − ع)

الحل



س س' هو محور السينات
ص ص' هو محور الصادات
و (٠،٠) هي نقطة الأصل

ملاحظة

* إذا كانت النقطة (س، ص) تقع على محور السينات نضع (ص = ٠)
(س، ٠)

* إذا كانت النقطة (س، ص) تقع على محور الصادات نضع (س = ٠)
(٠، ص)

⇐ أكمل:

① النقطة (٣، ٢) تقع في الربع ...

② النقطة (-٣، -٢) تقع في الربع ...

③ النقطة (-٢، ٣) تقع في الربع ...

④ النقطة (٥، -٣) تقع في الربع ...

⑤ النقطة (س٢، ص٢) تقع في الربع ...

⑥ إذا كانت النقطة (٥، ل - ٧) تقع على محور السينات فإن ل = ...

⑦ إذا كانت النقطة (س، ٧) تقع على محور الصادات فإن ٥ س + ١ = ...

⑧ إذا كانت النقطة (س - ٤، ٢ - س) حيث س ∈ ص تقع في الربع الثالث فإن س = ...

العلاقات - الدالة (التطبيق)

يرمز للعلاقة من مجموعة إلى مجموعة أخرى بالرمز ع .

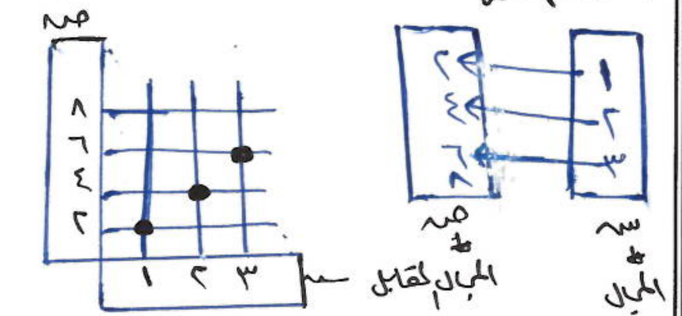
ع ⊂ س × ص

مثال①: إذا كانت س = {١، ٢، ٣}، ص = {٢، ٤، ٦، ٨} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني "أ = ½ ب" لكل أ ∈ س، ب ∈ ص اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني. هل ع تمثل دالة؟ ولماذا؟ وإذا كانت دالة اكتب مداها

الحل

بيان ع = {(١، ٢)، (٢، ٤)، (٣، ٦)}

المخطط البياني — المخطط السهمي



نعم ع تمثل دالة لأن

* كل عنصر من س ظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط

أو * لأن كل عنصر من س خرج منه سهم واحد فقط في المخطط السهمي

أو * لأن كل خط رأسي تقع عليه نقطة واحدة فقط في المخطط البياني.

المدى = {٢، ٤، ٦}

المدى ⊂ ص المجال المقابل

مثال (١) : إذا كانت س = {١، ٢، ٣} وكانت ص = {٣، ٦، ٩، ١٢، ١٥} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني "أ = $\frac{1}{3}$ ب" لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي. هل ع تمثل دالة ؟

الحل

مثال (٣) : إذا كانت س = {١، ٣، ٤، ٥} وكانت ص = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} وكانت ع علاقة حيث أ ع ب تعني "أ + ب = ٧" لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع . هل ع تمثل دالة

الحل

ملاحظات :

* أ معكوس ضربي لـ ب معناه مقلوب العدد

مثلاً ٣ ← $\frac{1}{3}$ ، ٥ ← $\frac{1}{5}$

١ ← ١ ، -١ ← -١

لا يوجد معكوس ضربي للصفر

* أ معكوس جمعي لـ ب معناه تغيير الإشارة

مثلاً ٣ ← -٣ ، -١ ← ١

المعكوس الجمعي للصفر هو الصفر

* أ تقسم ب معناها الثاني يقبل القسمة على الأول

* أ مضاعف لـ ب معناها أ تقبل القسمة على ب

الصفر مضاعف لكل الأعداد.

مثال (٢) : إذا كانت س = {-٢، -١، ٠، ١، ٢} وكانت ع علاقة على س حيث أ ع ب تعني "أ معكوس جمعي للعدد ب" اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي.

الحل

مثال ⑤: إذا كانت س = {١، ٢، ٣، ٤}، ص = {١، ٤، ٦، ٩، ١٠}، ع علاقة حيث أ ع ب تعني "أ = $\sqrt{ب}$" ① اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي ② بين أن ع دالة ثم اكتب مداها.

الحل

مثال ⑥: س = {٢، ٣، ٤}، ص = {٦، ٨، ١٠، ١١، ١٥}، أ ع ب تعني "أ تقسم ب" اكتب بيان ع ومثله. هل ع دالة؟

الحل

مثال ⑦ إذا كانت س = {٢، ١، ٠، $\frac{١}{٢}$}

وكانت ع علاقة على س حيث

أ ع ب تعني "أ معكوس ضربي لـ ب" حيث أ، ب ∈ س

اكتب بيان ع ومثله بالمخطط السهمي.

هل ع تمثل دالة؟

الحل

مثال ⑧ إذا كانت س = {١، ٢، ٣، ٥}

ع دالة على س، بيان ع = {(أ، ٣)، (ب، ١)، (١، ٥)} فأوجد القيمة العددية أ + ب

الحل

مثال ⑨: س = {٠، ١، ٤، ٧}، ص = {١، ٣، ٥، ٦}

أ ع ب تعني "أ + ب < ٨"

اكتب بيان ع ---

الحل

مثال ⑩ س = {٤، ٦، ٨، ١٠} ، ص = {٢، ٣، ٤، ٥} و ع علاقة حيث أ ع ب تعني "أ = ٢ب"
اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي. هل ع تمثل دالة؟
الحل

مثال ⑪ إذا كانت س = {-١، ١، ٢} ، ص = {٢، ٤، ٦، ٨} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني ب = ٢أ + ٤

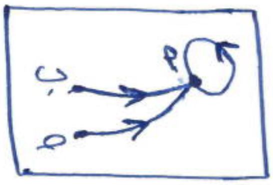
① اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي.
② بين أن ع دالة وأوجد مداها.

الحل

تدريب: س = {-٢، -٣، ٢} ، ص = {$\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٢٧}$ ، ٨} ع علاقة حيث أ ع ب تعني "$أ^{٣}$ = ب"
اكتب بيان ع ومثله . هل ع تمثل دالة؟

أكمل:

① الشكل المقابل يمثل دالة على س مداها ...



② إذا كان بيان ع هو {(١، ٣)، (٢، ٥)، (٤، ٣)} فإن ع تمثل دالة مداها ...

③ إذا كانت د تمثل دالة من س إلى ص فإن س تسمى ... ، ص تسمى ... ، مجموعة صور المجال س تسمى ...

مثال ⑫ إذا كانت س = {١، ٢، ٣} ، ص = {١٢، ٢١، ٢٢، ٤٧، ٢٥} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني "أ رقم من أرقام العدد ب" لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

① اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي.
② أي من العلاقات التالية صواب مع ذكر السبب ١ ع ١٥ ، ٢ ع ٢١ ، ٣ ع ٤٧

الحل

أ / محمد ربيع
01158509989

دوال كثيرات الحدود

⟸ يرمز للدالة بالرمز د أو ر أو ق أو ...

⟸ إذا كانت د دالة من المجموعة س إلى المجموعة ص فنكتب

د : س ⟶ ص أو د(س) = ص

⟸ الدالة كثيرة الحدود هي دالة قاعدتها حد جبري أو مقدار جبري ولابد أن يتوفر فيها شرطان هما:

① يكون مجالها ح ومجالها المقابل ح

② أسس س في كل الحدود أعداد طبيعية مثل ٠، ١، ٢، ٣، ...

مثلاً

د(س) = س² + ٥س + ٣ دالة كثيرة حدود

د(س) = س − ٣ " "

د(س) = س⁻² + ٥ ليست كثيرة حدود

د(س) = $\sqrt{س + ١}$ + ٥ ليست " "

ملاحظة
- يجب تحديد إذا ما كانت الدالة كثيرة حدود أم لا قبل وضعها في أبسط صورة.

مثلاً د(س) = س ($\frac{١}{س}$ + ١)

ليست كثيرة حدود على الرغم أنه عند وضعها في أبسط صورة تكون

د(س) = س × $\frac{١}{س}$ + س × ١ = ١ + س

كثيرة حدود

⟸ درجة الدالة:
هي أعلى أس للمتغير س في قاعدة الدالة.

مثلاً

① د(س) = س³ − ٢س² + ٩ من الدرجة الثالثة "تكعيبية"

② د(س) = س² − ٧س + ٦ من الدرجة الثانية "تربيعية"

③ د(س) = ٤س + ٣ من الدرجة الأولى "خطية"

④ د(س) = ٣ من الدرجة الصفرية "ثابتة"

خلي بالك قبل تحديد درجة الدالة يجب وضعها في أبسط صورة

* أكمل:

① الدالة د حيث د(س) = س⁴ − ٢س³ + ٧ كثيرة حدود من الدرجة ...

② الدالة د(س) = س² − (س² − ٣س) كثيرة حدود من الدرجة ...

③ الدالة د(س) = س² (س − س²) من الدرجة ...

④ درجة الدالة د(س) = س² − (١ + س) هي ...

خلي بالك

د(س) = $\frac{س + ٥}{س}$

وكل دالة قاعدتها قاعدة الدالة

مثال ①: إذا كانت د(س) = ٣س + ١
فأوجد قيمة د(٢) ، د(٠) ، د(-١)

الحل

نعوض في قاعدة الدالة د(س) = ٣س + ١

د(٢) = ٣ × ٢ + ١ = ٧

د(٠) = ٣ × ٠ + ١ = ١

د(-١) = ٣ × -١ + ١ = -٣ + ١ = -٢

مثال ②: إذا كانت د(س) = ٢س - ١ فأثبت أن د(٢) - ٣ د(١) = صفر

الحل

مثال ③: إذا كانت د(س) = س² - ٣س ، ر(س) = س - ٣ فأوجد

① د(√٣) + ٣ ر(√٣)

② أثبت أن د(٣) = ر(٣) = صفر

الحل

مثال ④: إذا كانت س = {٠، ١، ٢، ٣} ، ص = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧} وكانت د: س ← ص حيث د(س) = ٥ - س

① أوجد مدى الدالة د

② ارسم مخططاً بيانياً للدالة د

الحل

أكمل:

① إذا كانت د(س) = س² - س + ٣
فإن د(-٢) = ...

② إذا كانت د(س) = س² - √٣ س
فإن د(√٣) = ...

③ إذا كانت د(س) = ك س + ٨ ، د(٢) = صفر فإن ك = ...

س د(س)
(٢ ، صفر)

ك × ٢ + ٨ = صفر

٢ك = -٨

ك = $\frac{-٨}{٢}$

ك = -٤

أ / محمد ربيع
01158509989

④ إذا كانت د(س) = س − ٥ ، د(م) = ٦ فإن م = ---

⑤ إذا كان (٣ ، ص) ∈ بيان الدالة د حيث د(س) = س + ٢ فإن ص = ---

⑥ إذا كان (−١ ، ٠) ∈ بيان الدالة د حيث د(س) = م س + ٢ فإن م = ---

⑦ إذا كان (م ، م) ∈ بيان الدالة د حيث د(س) = ٢س + ٣ فإن م = ---

⇐ دراسة بعض دوال كثيرات الحدود ⇐

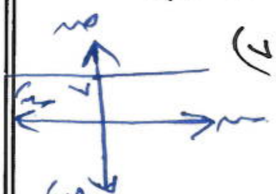
أولاً الدالة الثابتة :

د(س) = أي عدد ∈ ح

مثلاً د(س) = ٥ أو د(س) = ٧ أو د(س) = ٣ ، ٢ أو ...

* الدالة الثابتة هي دالة كثيرة حدود من الدرجة الصفرية ويمثلها بيانياً خط مستقيم يوازي محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، ص)

مثلاً د(س) = ٧ هي دالة ثابتة من الدرجة الصفرية يمثلها بيانياً خط مستقيم يوازي محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، ٧)



⇐ أكمل :

① إذا كان د(س) = ٧ فإن د(٥) = --- ، د(٢) = --- ، د(٠) = ---

② إذا كانت د(س) = ٩ فإن د(٢) = ---

③ إذا كانت د(س) = ٣ فإن د(١٠) − د(٥) = ---

④ إذا كانت د(س) = ٣ فإن $\frac{د(١٠)}{د(٥)}$ = ---

⑤ إذا كانت د(س) = ٧ فإن د(٣) + د(−٣) = ---

ثانياً الدالة الخطية :

هي دالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى ويمثلها بيانياً خط مستقيم

⇐ أمثلة للدالة الخطية :

د(س) = ٢س + ٥ ، د(س) = ٣ − س

مثال : مثل بيانياً د(س) = ٢س − ١

الحل

ملاحظة : د(س) = م س حيث م ≠ صفر يمثلها بيانياً خط مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)

مثال : إذا كان المستقيم الممثل للدالة د: ح ← ح حيث د(س) = ٦س − أ يقطع محور الصادات في النقطة (ب ، ٣) فأوجد قيمة ٢أ − ٥ب

الحل

المستقيم يقطع محور الصادات ∴ س = ٠

∴ $\boxed{\text{ب = صفر}}$ (٠ ، ٣)

د(س) = ٦س − أ ⇐ ٣ = ٦ × ٠ − أ

٣ = −أ ← $\boxed{\text{أ = −٣}}$

المقدار ٢أ − ٥ب = ٢ × (−٣) − ٥ × ٠

= −٦

أكمل :

① إذا كانت النقطة (أ ، ٣) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة د(س) = ٤س − ٥ فإن أ = ...

② إذا كان المستقيم الممثل للدالة د: ح ← ح حيث د(س) = أس + ب يقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، ٣) وكانت د(٢) = ٧ فإن أ = ... ، ب = ...

③ الدالة د: د(س) = ٣س يمثلها بيانياً خط مستقيم يمر بالنقطة ...

(٣ ، ٣) ، (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٠) ، (٠ ، ٣)

④ إذا كان المستقيم الذى يمثل الدالة د: د(س) = ٢س − أ يمر بنقطة الأصل فإن أ = ...

⑤ إذا كانت (أ ، ٤) إحدى نقط الدالة د: ح ← ح حيث د(س) = ٢س + ب فإن ٦أ + ٣ب = ...

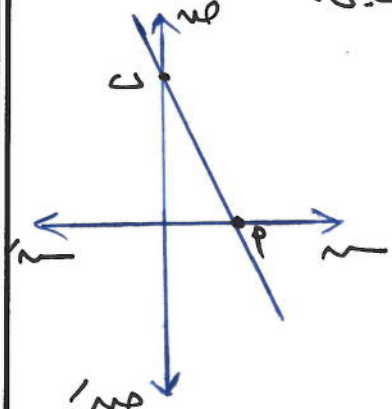
مثال: في الشكل المقابل:

د(س) = ٤ − ٢س

أوجد

① إحداثي أ ، ب

② مساحة سطح △ أوب



الحل

ثالثاً : الدالة التربيعية

هي دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية .

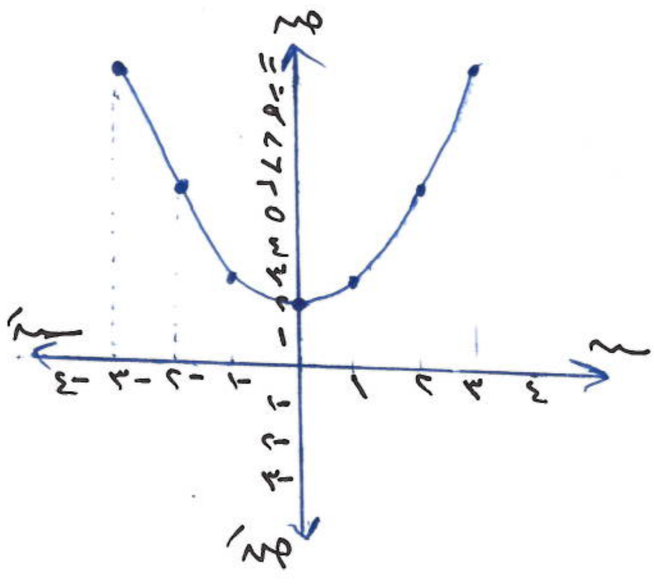
د(س) = أس² + ب س + جـ

أ ، ب ، جـ أعداد .

مثال : مثل بيانياً منحنى الدالة د(س) = س² + ٢ حيث س ∈ [-٣ ، ٣] ومن الرسم أوجد
① إحداثيي رأس المنحنى ② معادلة محور التماثل ③ القيمة العظمى أو الصغرى للدالة

الحل

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص	١١	٦	٣	٢	٣	٦	١١



نقطة رأس المنحنى هي (٠ ، ٢)

معادلة محور التماثل هي س = صفر

القيمة الصغرى للدالة = ٢

ملاحظات :

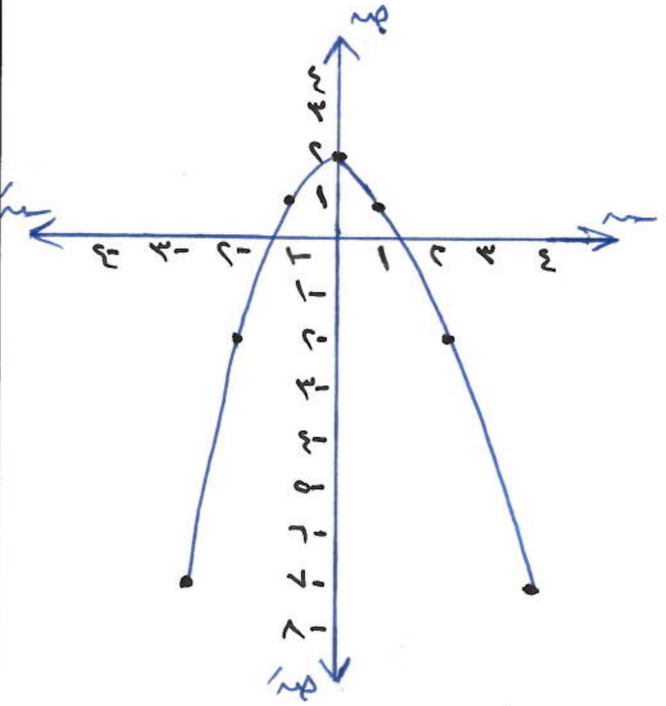
* إذا كان معامل س² موجب فإن المنحنى يكون على شكل ∪ ويكون للدالة قيمة صغرى

* إذا كان معامل س² سالب فإن المنحنى يكون على شكل ∩ ويكون للدالة قيمة عظمى .

مثال② مثل بيانياً منحنى الدالة د(س) = ٢ - س² حيث س ∈ [-٣ ، ٣] ومن الرسم أوجد ① نقطة رأس المنحنى ② معادلة محور التماثل ③ القيمة العظمى او الصغرى للدالة

الحل

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص	-٧	-٢	١	٢	١	-٢	٧



نقطة رأس المنحنى هي (٠ ، ٢)

معادلة محور التماثل هي س = صفر

القيمة العظمى للدالة = ٢

مثال ③: مثل د(س) = س^{٢} + ٢س + ١ متخذاً س ∈ [-٤، ٢] ومن الرسم أوجد
① إحداثي نقطة رأس المنحنى
② معادلة محور التماثل
③ القيمة الصغرى للدالة

الحل

مثال ④ مثل د(س) = س^{٢} - ٢س متخذاً س ∈ [-٢، ٤] ومن الرسم أوجد
① — ② — ③ —

الحل

مثال ⑤: مثل بيانياً د(س) = (س - ٢)^{٢} حيث س ∈ [-١، ٥] ومن الرسم أوجد ① رأس ② معادلة ③ قيمة

الحل

مثال ⑥: إذا كان منحنى الدالة د(س) = م - س^{٢} يقطع محور السينات في النقطة (-٢، ب) أوجد قيمة م^{ب} + ٢م

الحل

المنحنى يقطع محور السينات ∴ ص = صفر

ب = صفر النقطة (-٢، صفر)

عوض بالنقطة في د(س) = م - س^{٢}

٠ = م - (-٢)^{٢}

٠ = م - ٤

م = ٤

المقدار = م^{ب} + ٢م

= ٤^{صفر} + ٢×٤

= ١ + ٨ = ٩ #

* نقطة رأس المنحنى للدالة التربيعية

هي $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

حيث ب ← معامل س ، أ ← معامل $س^٢$

مثال: نقطة رأس منحنى الدالة د:

$د(س) = س^٢ - ٤س + ٤$ هي ...

$أ = ١$ ، $ب = -٤$ ⇐ $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{٤}{٢\times١} = \frac{٤}{٢} = ٢$

⇐ $د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) = د(٢) =$ عوض في الدالة

$د(٢) = (٢)^٢ - ٤\times٢ + ٤$

$= ٤ - ٨ + ٤ =$ صفر

نقطة رأس المنحنى هي (٢ ، صفر)

أكمل:

① نقطة رأس منحنى الدالة د:

$د(س) = ٢س^٢ - ٤س + ٥$ هي ...

② نقطة رأس منحنى الدالة

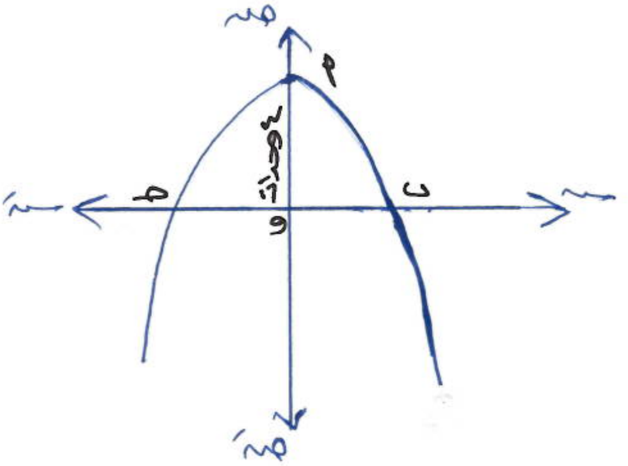
$د(س) = س^٢ - ٥$ هي ...

③ نقطة رأس منحنى الدالة

$د(س) = س^٢ - ٣$ هي ...

مثال: الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د حيث $د(س) = م - س^٢$

إذا كان أو = ٤ وحدات فأوجد



① قيمة م ② إحداثي ب ، جـ

③ مساحة المثلث الذي رؤوسه أ ، ب ، جـ

الحل

النسبة

النسبة:

هي مقارنة بين كميتين

$\frac{أ}{ب}$ ، أ ← مقدم ، ب ← تالي ، أو أ : ب

أ، ب معاً يُسميان بحدي النسبة

* النسبة لا تتغير إذا ضُربا حداها في أو قسما على عدد حقيقي لا يساوي الصفر

$\frac{٣}{٤} = \frac{٣\times٢}{٤\times٢} = \frac{٦}{٨}$ وهكذا

وكذلك $\frac{٨}{١٠} = \frac{٨\div٢}{١٠\div٢} = \frac{٤}{٥}$

* لكن النسبة تتغير إذا أضيف إلى أو طرح من حديها عدد حقيقي $\neq$ ٠.

$\frac{٣}{٥} \neq \frac{٣+٤}{٥+٤} \neq \frac{٧}{٩}$

مثال: عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٧ إذا طرح من كل منهما ٥ أصبحت النسبة بينهما ١ : ٣ أوجد العددين

الحل

نفرض أن العددين ٣س ، ٧س

$\frac{٣س-٥}{٧س-٥} = \frac{١}{٣}$ "مقص"

$٣(٣س-٥) = ١(٧س-٥)$ كباري

$٩س-١٥ = ٧س-٥$ تبديل مع تغيير الإشارة

$٩س-٧س = ١٥-٥$

$٢س = ١٠ \leftarrow س = \frac{١٠}{٢} = ٥$

العدد الأول $٣س = ٣\times٥ = ١٥$

العدد الثاني $٧س = ٧\times٥ = ٣٥$

مثال: عددان صحيحان النسبة بينهما ٢ : ٣ إذا أضيف للأول ٧ وطرح من الثاني ١٢ صارت النسبة بينهما ٥ : ٣ أوجد العددين

الحل

مثال: أوجد العدد الذي إذا أضيف مربعه إلى كل من حدي النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٤ : ٥

الحل

نفرض أن العدد س ← مربعه س²

$\frac{٧+س^٢}{١١+س^٢} = \frac{٤}{٥}$ "مقص"

الحل بنفسك

مثال ④: أوجد العدد الموجب الذي إذا أضيف مربعه إلى كل من حدي النسبة ٥ : ١١ فإنها تصبح ٣ : ٥

الحل

مثال ⑤: أوجد العدد الذي إذا طرح ثلاثة أمثاله من حدي النسبة $\frac{٤٩}{٦٩}$ فإنها تصبح $\frac{٢}{٣}$

الحل

واجب

س: عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٤ إذا طرح من الأكبر ٣ وأضيف للعدد الأصغر ٤ صارت النسبة بينهما ٨ : ٩ أوجد العددين

الحل

التناسب

⇐ التناسب هو تساوي نسبتين أو أكثر.

* إذا كان أ، ب، جـ، د كميات متناسبة فإن

$$\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$$

يسمى أ ← الأول المتناسب

ب ← الثاني المتناسب

جـ ← الثالث المتناسب

د ← الرابع المتناسب

يسمى أ، د طرفي التناسب

يسمى ب، جـ وسطي التناسب

⇐ أكمل:

① الثالث المتناسب للكميات ٣، ٤، ـــ، ٢٠ هو ...

٣، ٤، جـ، ٢٠

$\frac{٣}{٤} = \frac{جـ}{٢٠}$ ⇐ جـ $= \frac{٣ \times ٢٠}{٤}$

$= ١٥$

② الثاني المتناسب للأعداد ٢، ـــ، ٤، ١٠ هو ...

③ الرابع المتناسب للأعداد ٢ ، ٥ ، ٤ هو ...

④ الثالث المتناسب للأعداد ٢ ، ٥ ، ... ، ١٠ هو ...

خواص التناسب:

* خاصية ①

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن

$أ \times د = جـ \times ب$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

---

* خاصية ②

إذا كان $أ \times د = ب \times جـ$ فإن

$\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

روح ومترجعش فاضي

* أكمل

① إذا كان $٥س = ٧ص$ فإن $\frac{س}{ص} = ...$

② إذا كانت $٢أ = ٤ب$ فإن $\frac{أ}{ب} = ...$

③ إذا كان $٣س = ٥ص$ فإن $\frac{ص}{س} = ...$

④ إذا كان $٥أ - ٧ب =$ صفر فإن $أ : ب = ... : ...$

⑤ إذا كان $٢س = ٧ص$ فإن $\left(\frac{س}{ص}\right)^{-1} = ...$

* خاصية ③

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن

$\frac{أ}{جـ} = \frac{ب}{د}$

$\frac{مقدم}{مقدم} = \frac{تالي}{تالي}$

مثال: إذا كان $\frac{أ}{٣} = \frac{ب}{٥}$

فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$

* إذا كانت أ ، س ، ب ، ٢س كميات متناسبة فإن $\frac{أ}{ب} = ...$

---

* خاصية ④

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن

$أ = جـ م$ حيث م ثابت ≠ صفر

$ب = د م$

مثال: $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$

فإن $أ = ٣م$ ، $ب = ٥م$

مثال: إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ فأوجد قيمة $٧أ + ٩ب : ٤أ + ٢ب$

الحل

$\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ $\boxed{أ = ٣م \quad ب = ٥م}$

$$\frac{٧أ + ٩ب}{٤أ + ٢ب} = \frac{٧ \times ٣م + ٩ \times ٥م}{٤ \times ٣م + ٢ \times ٥م}$$

$$= \frac{٢١م + ٤٥م}{١٢م + ١٠م}$$

$$= \frac{\cancel{٦٦م}}{\cancel{٢٢م}} = \frac{٣}{١} = ٣ : ١$$

مثال ⑥: إذا كان (س − ٢ص) / (س + ٣ص) = ١ / ٣

فأوجد قيمة ص / س

الحل مقص

٣(س − ٢ص) = ١(س + ٣ص) كباري

٣س − ٦ص = س + ٣ص تبديل

٣س − س = ٦ص + ٣ص

٢س = ٩ص روح ومترجعش فاضي

ص / س = ٢ / ٩

مثال ⑦ إذا كان س / ص = ٢ / ٣ أوجد

قيمة (٣س + ٢ص) / (٦ص − س)

الحل

مثال ⑧ إذا كان (١٢س + أ) / (٧س + ب) = أ / ب

فأوجد قيمة (أ + ٢ب) / ٢أ

الحل

مثال ⑨: أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى كل من الأعداد ٣، ٥، ٨، ١٢ فإنها تكون متناسبة الحل

---

* خاصية ⑤

إذا كانت أ، ب، جـ، د كميات متناسبة فإن

أ / ب = جـ / د = م

أ = ب م
جـ = د م

م ثابت التناسب لا يساوي صفر

مثال ⑩ إذا كانت أ، ب، جـ، د كميات متناسبة فأثبت أن

(٥أ + ٣جـ) / (٥ب + ٣د) = (٣أ − ٢جـ) / (٣ب − ٢د)

الحل

أ / ب = جـ / د = م

أ = ب م
جـ = د م

الطرف الأيمن = (٥ب م + ٣د م) / (٥ب + ٣د) = م(~~٥ب + ٣د~~) / ~~(٥ب + ٣د)~~

= م

الطرف الأيسر $= \dfrac{٣أ - ٢ج}{٣ب - ٢د}$

$= \dfrac{٣ب م - ٢د م}{٣ب - ٢د} = \dfrac{م(\cancel{٣ب - ٢د})}{\cancel{٣ب - ٢د}}$

$=$ م

∴ الطرفان متساويان

مثال ③: إذا كانت أ، ب، ج، د كميات متناسبة فأثبت أن

① $\dfrac{أ^٢ + ج^٢}{أب + جد} = \dfrac{أ}{ب}$

الحل

$\dfrac{أ}{ب} = \dfrac{ج}{د} = م$ $\boxed{\begin{matrix} أ = ب م \\ ج = د م \end{matrix}}$

الطرف الأيمن $= \dfrac{(ب م)^٢ + (د م)^٢}{ب م \times ب + د م \times د}$

$= \dfrac{ب^٢ م^٢ + د^٢ م^٢}{ب^٢ م + د^٢ م} = \dfrac{م^٢(\cancel{ب^٢ + د^٢})}{م(\cancel{ب^٢ + د^٢})}$

$= \dfrac{م^٢}{م} =$ م

الطرف الأيسر $= \dfrac{ب م}{ب} =$ م

∴ الطرفان متساويان

② $\dfrac{أج}{بد} = \left(\dfrac{أ - ج}{ب - د}\right)^٢$

الحل

مثال ④ إذا كانت أ، ب، ج، د كميات متناسبة فأثبت أن

① $\sqrt[٣]{\dfrac{٥أ^٣ - ٣ج^٣}{٥ب^٣ - ٣د^٣}} = \dfrac{أ + ج}{ب + د}$

الحل

② $\dfrac{أ^٢ + ج^٢}{ب^٢ + د^٢} = \dfrac{أج}{بد}$

الحل

مثال ④ إذا كانت $\dfrac{أ + ب}{ب} = \dfrac{ج + د}{د}$

فأثبت أن أ، ب، ج، د كميات متناسبة

الحل

* الخاصية ⑥ :

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و} = \dots$

وكانت $م_1$ ، $م_2$ ، $م_3$ أعداد حقيقية

فإن

$$\frac{م_1 أ + م_2 جـ + م_3 هـ}{م_1 ب + م_2 د + م_3 و} = \text{إحدى النسب}$$

أي أن

$$\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالي}} = \text{إحدى النسب}$$

⟸ أكمل

① إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{3}{5}$ فإن

$\frac{أ + جـ}{ب + د} = \dots$

② إذا كان $\frac{3}{س} = \frac{7}{ص} = \frac{أ}{ص - س}$

فإن $أ = \dots$

③ $\frac{ل}{3} = \frac{م}{7} = \frac{ل + 2م}{\dots}$

④ إذا كان $\frac{س}{5} = \frac{ص}{4} = \frac{س + 2ص}{ك}$

فإن $ك = \dots$

مثال ⑤ إذا كان $\frac{أ}{4س + ص} = \frac{ب}{س - 4ص}$

فأثبت أن $\frac{أ + ب}{5س - 3ص} = \frac{أ - ب}{3س + 5ص}$

الحل

بجمع مقدمات وتوالي النسبتين

$$\frac{أ + ب}{4س + ص + س - 4ص} = \frac{أ + ب}{5س - 3ص}$$

$=$ إحدى النسب ①

بطرح النسبة الثانية من الأولى

$$\frac{أ - ب}{4س + ص - س + 4ص} = \frac{أ - ب}{3س + 5ص} =$$

إحدى النسب ②

من ①، ②

$$\therefore \frac{أ + ب}{5س - 3ص} = \frac{أ - ب}{3س + 5ص}$$

مثال ⑥ إذا كان $\frac{س}{أ - ب + جـ} = \frac{ص}{ب - جـ + أ} = \frac{ع}{جـ - أ + ب}$

فأثبت أن $\frac{س + ص}{أ} = \frac{ص + ع}{ب}$

الحل

مثال: إذا كان $\frac{س}{٢أ+ب} = \frac{ص}{٢ب-جـ} = \frac{ع}{٢جـ-أ}$

فأثبت أن

$$\frac{٢س+ص}{٤أ+٤ب-جـ} = \frac{٢س+٢ص+ع}{٣أ+٦ب}$$

الحل

مثال: إذا كان $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٥}$

فأثبت أن $\frac{٢ص-ع}{٣س-٢ص+ع} = \frac{١}{٢}$

الحل

مثال: إذا كان $\frac{س+ص}{٧} = \frac{ص+ع}{٥} = \frac{ع+س}{٨}$

فأثبت أن $\frac{س+ص+ع}{س-ع} = ٥$

الحل

مثال:

إذا كان $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣} = \frac{جـ}{٤} = \frac{٢أ-ب+٥جـ}{٣س}$

فأوجد قيمة س

الحل

التناسب المتسلسل :

إذا كان أ ، ب ، جـ في تناسب متسلسل فإن

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م \qquad \boxed{\begin{array}{l} ب = جـ\,م \\ أ = جـ\,م^2 \end{array}}$$

أ ← يسمى أول متناسب

جـ ← يسمى ثالث متناسب

ب ← يسمى الوسط المتناسب

الوسط المتناسب $\boxed{ب = \pm\sqrt{أ \times جـ}}$

ملاحظة أ ، ب ، جـ في تناسب متسلسل

أو ب وسط متناسب بين أ ، جـ

نفس المعنى

$$\boxed{\begin{array}{l} ب = جـ\,م \\ أ = جـ\,م^2 \end{array}} \qquad \frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$$

* إذا كان أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل فإن

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م \qquad \boxed{\begin{array}{l} جـ = د\,م \\ ب = د\,م^2 \\ أ = د\,م^3 \end{array}}$$

* أكمل :

① الوسط المتناسب للعددين ٢ ، ٨ هو ...

② الوسط المتناسب للعددين ٣ ، ٢٧ هو ...

③ الثالث المتناسب للعددين ٢ ، ٦ هو ...

④ الأول المتناسب للعددين ٤ ، ٨ هو ...

مثال ①: إذا كانت ب وسطاً متناسباً بين أ ، جـ فأثبت أن

① $\frac{أ+ب}{ب+جـ} = \frac{أ}{ب}$

الحل

$$\boxed{\begin{array}{l} ب = جـ\,م \\ أ = جـ\,م^2 \end{array}} \qquad \frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$$

الطرف الأيمن $= \frac{جـ\,م^2 + جـ\,م}{جـ\,م + جـ} = \frac{جـ\,م\,(م+1)}{جـ\,(م+1)} = م$

الطرف الأيسر $= \frac{جـ\,م^2}{جـ\,م} = م$

∴ الطرفان متساويان

② $\frac{أ}{جـ} = \frac{ب^2}{جـ^2}$

الحل

③ $\frac{أ^2+ب^2}{ب^2+جـ^2} = \frac{أ}{جـ}$

الحل

الطرف الأيمن $= \frac{(جـ\,م^2)^2 + (جـ\,م)^2}{(جـ\,م)^2 + جـ^2} = \frac{جـ^2 م^4 + جـ^2 م^2}{جـ^2 م^2 + جـ^2} = \frac{جـ^2 م^2 (م^2+1)}{جـ^2 (م^2+1)} = م^2$

الطرف الأيسر $= \frac{جـ\,م^2}{جـ} = م^2$

∴ الطرفان متساويان

ملاحظة: ب ، جـ ، ع في تناسب متسلسل

$$\boxed{\begin{array}{l} جـ = ع\,م \\ ب = ع\,م^2 \end{array}} \qquad \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{ع} = م$$

مثال ①: إذا كانت أ، ب، جـ، د في تناسب متسلسل فأثبت أن

① $\frac{أب - جـ د}{ب^2 - جـ^2} = \frac{أ + جـ}{ب}$

الحل

② $\frac{أ^2 - ٣جـ^2}{ب^2 - ٣د^2} = \frac{ب}{د}$

الحل

مثال ③: إذا كانت $\frac{أ^2 + ب^2}{ب^2} = \frac{ب^2 + جـ^2}{جـ^2}$

فأثبت أن ب وسط متناسب بين أ، جـ

حيث أ جـ كمية موجبة. الحل "مقص"

$جـ^2(أ^2 + ب^2) = ب^2(ب^2 + جـ^2)$

$أ^2جـ^2 + ب^2جـ^2 = ب^4 + ب^2جـ^2$

أكمل بنفسك

مثال ④: إذا كان أ، ٣، ٩، ب في تناسب متسلسل فأوجد قيمة أ، ب الحل

مثال ⑤: أوجد العدد الذي إذا طرح من الأعداد ٣، ٧، ٩ فإنها تكون تناسباً متسلسلاً الحل

التغير الطردي والعكسي

* التغير الطردي:

* ص تتغير طرديًا مع س

ص $\propto$ س ⟵ $\boxed{ص = م س}$ ، م ثابت

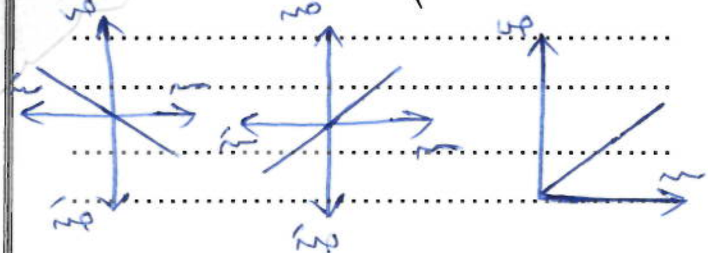
العلاقة بين ص، س

أي أن $\frac{ص}{س} = م$ ⟵ $\frac{ص_1}{س_1} = \frac{ص_2}{س_2} =$ ثابت

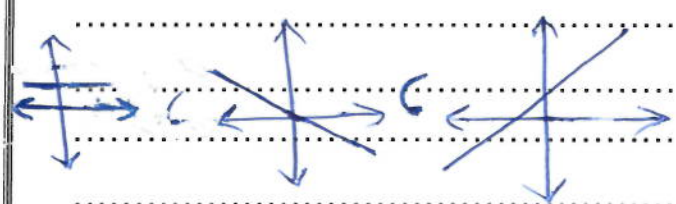
* إذا كانت ص $\propto$ س فإن

$$\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1}{س_2}$$

* التغير الطردي يمثل بيانيًا بخط مستقيم يمر بنقطة الأصل



* اختر أي من الأشكال الآتية تمثل تغير طردي



* التغير العكسي:

* ص تتغير عكسيًا مع س

ص $\propto \frac{1}{س}$ ⟵ $\boxed{ص = \frac{م}{س}}$

العلاقة

أي أن ص س = م ⟵ ص س = ثابت

* إذا كانت ص $\propto \frac{1}{س}$ فإن

$$\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_2}{س_1}$$

مثال (1) إذا كانت ص $\propto$ س وكانت ص = 14 عندما س = 42 فأوجد

(1) العلاقة بين ص، س

(2) قيمة ص عندما س = 60

الحل

مثال (2):

إذا كانت ص $\propto \frac{1}{س}$ وكانت ص = 3 عندما س = 2 فأوجد

(1) العلاقة بين ص، س

(2) قيمة ص عندما س = 1.5

الحل

مثال ③: إذا كانت ص ∝ المعكوس الضربي للمقدار $\frac{1}{س^2}$ فأوجد العلاقة بين س، ص إذا عُلم أن ص = ٤ عندما س = ٣ ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٩

الحل

مثال ④: إذا كانت ص ∝ $\frac{1}{\sqrt{س}}$ وكانت س = ٢ عندما ص = ٣ أوجد س عندما ص = ١,٥

الحل

مثال ⑤: إذا كانت ص ∝ (س + ١) وكانت س = ٣ عندما ص = ٢ فأوجد العلاقة بين س، ص

الحل

مثال ⑥: إذا كان $\frac{٢س - ص}{٧س - ع} = \frac{ص}{ع}$ فأثبت أن ص ∝ ع

الحل

مثال ⑦: إذا كان س⁴ص² - ١٤س²ص + ٤٩ = ٠ فأثبت أن ص ∝ $\frac{1}{س^2}$

الحل

مثال ⑧: إذا كان ٤أ² + ٩ب² = ١٢أب فأثبت أن أ تتغير طردياً مع ب

الحل

أكمل :

١) إذا كانت ص ∝ س فإن $\frac{\text{ص}_1}{\text{ص}_2}$ = ...

٢) إذا كانت ص تتغير عكسياً مع س فإن $\frac{\text{ص}_1}{\text{ص}_2}$ = ...

٣) إذا كانت ص = $\frac{3}{5}$ س فإن ص ∝ ....

٤) إذا كانت ص = $\frac{5}{\text{س}}$ فإن ص ∝ ....

٥) إذا كانت ص = $\frac{5}{\text{س}}$ فإن ص تتغير عكسياً مع ....

٦) إذا كان س − ٥ ص = صفر فإن س ∝ ....

٧) إذا كان س ص = ١٠ فإن ص ∝ ....

٨) إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ٥ عندما س = ٣ فإن ثابت التغير = ...

اختر :

١) العلاقة التي تمثل تغير طردي هي
[س ص = ٥ ، ص = س + ٣ ، $\frac{\text{س}}{3} = \frac{4}{\text{ص}}$ ، $\frac{\text{ص}}{2} = \frac{\text{س}}{5}$]

٢) العلاقة التي تمثل تغير عكسي هي ....
[ص = س + ٥ ، ص = ٤ س ، $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{5}{7}$ ، س ص = $\frac{3}{4}$]

٣) إذا كانت ص تتغير عكسياً مع س وكانت س = ٧ $\sqrt{3}$ عندما ص = $\frac{2}{\sqrt{3}}$ فإن ثابت التناسب = ...
[$\frac{3}{2}$ ، $\frac{2}{3}$ ، ١٤ ، ٦]

٤) إذا كانت س ص^{5} = ثابت فإن س تتغير عكسياً مع ....
[$\frac{1}{\text{ص}}$ ، ص^{5} ، ص ، ص^{2}]

٥) إذا كانت ص = ٣ س − ٦ فإن ص ∝ ....
[س ، ٣ س ، س − ٢ ، ٣ س^{2}]

تمارين على التغير

مثال ١) إذا كانت ص = أ − ٩ وكانت ص ∝ $\frac{1}{\text{س}^2}$ وكانت أ = ١٨ عندما س = $\frac{3}{2}$ فأوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ١

الحل

ص ∝ $\frac{1}{\text{س}^2}$ ← ص = $\frac{\text{م}}{\text{س}^2}$ ← (١)

ص = أ − ٩ ← $\frac{\text{م}}{\text{س}^2}$ = أ − ٩

أ = ١٨ عندما س = $\frac{3}{2}$ ←

$\frac{\text{م}}{(\frac{3}{2})^2}$ = ١٨ − ٩ ⇐ $\frac{\text{م}}{\frac{9}{4}} = \frac{9}{1}$

م × ١ = $\frac{4}{9}$ × ٩ ← م = ٤

بالتعويض في (١)

العلاقة $\boxed{\text{ص} = \frac{4}{\text{س}^2}}$

عندما س = ١ ⇐ ص = $\frac{4}{(1)^2}$ = ٤

مثال ٢) إذا كانت س = ل + ٩ ، وكانت ل ∝ ص فأوجد العلاقة بين ل ، ص علماً بأن س = ٤٢ عندما ص = ٥

الحل

ل ∝ ص ← ل = م ص ← (١)

س = ل + ٩ ← س = م ص + ٩

ل = ٢٤ عندما ص = ٥

⟸ ٢٤ = م × ٥ + ٩

٢٤ − ٩ = ٥م

٥م = ١٥ ⟸ م = $\frac{١٥}{٥}$ = ٣

بالتعويض في ①

$\boxed{ل = ٣ص}$ العلاقة بين ل ، ص

مثال ③ تسير سيارة بسرعة ثابتة بحيث تتناسب المسافة المقطوعة طردياً مع الزمن فإذا قطعت السيارة ١٥٠ كم في ٦ ساعات فكم كيلومتراً تقطعها السيارة في ١٠ ساعات ؟

الحل

المسافة (ف) ∝ الزمن (ن)

$\frac{ف_1}{ف_2} = \frac{ن_1}{ن_2}$ ⟸ $\frac{١٥٠}{ف_2} = \frac{٦}{١٠}$

$ف_2 = \frac{١٥٠ \times ١٠}{٦} = ٢٥٠$ كم

مثال ④: إذا كان مقدار السرعة ع التي يخرج بها الماء من فوهة خرطوم يتناسب عكسياً مع مربع طول نصف قطر فوهة الخرطوم له فإذا كانت ع = ٥ سم/ث عندما نق = ٣ سم أوجد ع عندما نق = ٢,٥ سم

الحل

ع ∝ $\frac{1}{نق^2}$ ⟸ $\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{نق_2^2}{نق_1^2}$

$\frac{٥}{ع_2} = \frac{(٢,٥)^2}{(٣)^2}$

$\frac{٥}{ع_2} = \frac{٦,٢٥}{٩}$ ⟸ $ع_2 = \frac{٥ \times ٩}{٦,٢٥}$

= ٧,٢ سم/ث

مثال ⑤: من بيانات الجدول الآتي

س	٢	٤	٦
ص	٦	٣	٢

① بين نوع التغير بين ص ، س

② أوجد ثابت التناسب

③ أوجد قيمة ص عندما س = ٣

④ أوجد قيمة س عندما ص = ٢ $\frac{٢}{٥}$

الحل

إحصاء : جمع البيانات - التشتت

⇐ مصادر جمع البيانات :

① مصادر أوليه ② مصادر ثانوية

⇐ أساليب جمع البيانات :

① أسلوب الحصر الشامل ② أسلوب العينات

⇐ أنواع العينات :

① عينة عشوائية < بسيطة / طبقية ② عينة غير عشوائية "عمدية"

⇐ اختر :

① اختيار عينة من طبقات المجتمع الإحصائي تسمى بالعينة ... [عشوائية - طبقية - عمدية - عنقودية]

② من المصادر الثانوية لجمع البيانات [مقابلة شخصية - استبيانات - الملاحظة والتجريب - قاعدة بيانات الموظفين]

③ إذا تم أخذ عينة طبقية قدرها ٥٠ ثلاجة لفحصها من بين ٢٠٠ ثلاجة من النوع م ، ٣٠٠ ثلاجة من النوع ب فإن عدد مفردات النوع ب في العينة = ... [١٠ - ٢٠ - ٢٥ - ٣٠]

العدد الكلي = ٢٠٠ + ٣٠٠ = ٥٠٠

عدد مفردات النوع ب = $\frac{٣٠٠}{٥٠٠} \times ٥٠$ = ٣٠ ثلاجة

⇐ التشتت :

- من مقاييس التشتت المدى ، الانحراف المعياري
أسهل وأبسط ، أدقه

المدى = أكبر قيمة - أصغر قيمة

* المدى للقيم ٨ ، ٥ ، ٢ ، ٧ ، ١١ هو ...

* الجذر التربيعي الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي يسمى ... الانحراف المعياري

⇐ تذكر * الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددهم}}$

* المنوال هو أكثر القيم تكراراً

* الوسيط هو القيمة التي تتوسط مجموعة من القيم بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً

⇐ أكمل :

① الوسط الحسابي للقيم ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٩ هو ...

② القيمة الأكثر تكراراً لمجموعة من البيانات تسمى ...

③ الوسيط للقيم ٨ ، ٥ ، ٣ ، ٧ ، ٦ هو ...

④ الوسيط للقيم ١٠ ، ٢ ، ٥ ، ٧ ، ٤ هو ...

⑤ لأى مجموعة من القيم إذا تساوت جميع المفردات فإن التشتت = ...

⑥ أبسط مقاييس التشتت هو ...

⑦ أكثر مقاييس التشتت انتشاراً وأدقها ...

⟸ الإنحراف المعياري : σ سيجما

أولاً : الإنحراف المعياري لمجموعة من القيم

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}\,(س - \bar{س})^2}{ن}}$$

$\bar{س}$ الوسط الحسابي

ن عدد المفردات

مجـ مجموع

مثال : احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للقيم الآتية
١٦ ، ٣٢ ، ٥ ، ٢٠ ، ٢٧

الحل

س	$س - \bar{س}$	$(س - \bar{س})^2$
١٦	١٦ − ٢٠ = −٤	١٦
٣٢	٣٢ − ٢٠ = ١٢	١٤٤
٥	٥ − ٢٠ = −١٥	٢٢٥
٢٠	٢٠ − ٢٠ = صفر	صفر
٢٧	٢٧ − ٢٠ = ٧	٤٩
مجـ		٤٣٤

الوسط الحسابي $\bar{س} = \frac{١٦+٣٢+٥+٢٠+٢٧}{٥}$

$= \frac{١٠٠}{٥} = ٢٠$

الإنحراف المعياري

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}\,(س - \bar{س})^2}{ن}}$$

$$= \sqrt{\frac{٤٣٤}{٥}} \simeq ٩,٣$$

ثانياً : الإنحراف المعياري لتوزيع تكراري :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}\,(س - \bar{س})^2 \times ك}{\text{مجـ}\,ك}}$$

مجـ ك مجموع التكرارات

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ}\,(س \times ك)}{\text{مجـ}\,ك}$$

أكمل

① إذا كان مجـ $(س - \bar{س})^2 = ٣٦$ لمجموعة من القيم عددها يساوي ٩

فإن σ = ...

② $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد هذه القيم}}$ = ...

مثال: التوزيع التكرارى التالى يبين عدد أطفال بعض الأسر فى إحدى المدن الجديدة

عدد الأطفال	صفر	١	٢	٣	٤
عدد الأسر	٨	١٦	٥٠	٢٠	٦

احسب الوسط الحسابى والإنحراف المعيارى

الحل

س	ك	س × ك	س − $\bar{س}$	(س − $\bar{س}$)^2	(س − $\bar{س}$)^2 × ك
صفر	٨	صفر	٠ − ٢ = −٢	٤	٤ × ٨ = ٣٢
١	١٦	١٦	١ − ٢ = −١	١	١ × ١٦ = ١٦
٢	٥٠	١٠٠	٢ − ٢ = ٠	٠	٠ × ٥٠ = ٠
٣	٢٠	٦٠	٣ − ٢ = ١	١	١ × ٢٠ = ٢٠
٤	٦	٢٤	٤ − ٢ = ٢	٤	٤ × ٦ = ٢٤
مج	١٠٠	٢٠٠			٩٢

الوسط الحسابى $\bar{س} = \frac{٢٠٠}{١٠٠} = ٢$

الإنحراف المعيارى $ع = \sqrt{\frac{٩٢}{١٠٠}} \simeq ١$

تدريب

مثال: أوجد الإنحراف المعيارى لمجموعة القيم
٨ ، ٦ ، ٩ ، ٦ ، ٧ ، ٦ ، ٦ ، ٢ ، ٥

الحل

مثال: أوجد الانحراف المعياري للتوزيع التكراري ذي المجموعات الآتي:

المجموعات	صفر-	٤-	٨-	١٢-	١٦-٢٠	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٢	٩	٢٥

الحل

تذكر أن مركز المجموعة = $\frac{\text{الحد الأدنى} + \text{الحد الأعلى}}{٢}$

مركز المجموعة ← س

المجموعات	س	ك	س × ك	س − س̄	(س − س̄)^2	(س − س̄)^2 × ك
صفر-	٢	٣	٦	٢ − ١١,٦ = −٩,٦	٩٢,١٦	٢٧٦,٤٨
٤-	٦	٤	٢٤	٦ − ١١,٦ = −٥,٦	٣١,٣٦	١٢٥,٤٤
٨-	١٠	٧	٧٠	١٠ − ١١,٦ = −١,٦	٢,٥٦	١٧,٩٢
١٢-	١٤	٢	٢٨	١٤ − ١١,٦ = ٢,٤	٥,٧٦	١١,٥٢
١٦-٢٠	١٨	٩	١٦٢	١٨ − ١١,٦ = ٦,٤	٤٠,٩٦	٣٦٨,٦٤
مج		٢٥	٢٩٠			٨٠٠

الوسط الحسابي س̄ = $\frac{٢٩٠}{٢٥} = ١١,٦$

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\frac{٨٠٠}{٢٥}} \simeq ٥,٧$

تم بحمد الله
الانتهاء من منهج
الجبر والإحصاء ربيع
أ/ محمد ربيع

حساب مثلثات
النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

$1^\circ = 60'$ ° درجة

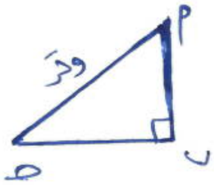
$1' = 60''$ ' دقيقة

'' ثانية

* يوجد في الآلة الحاسبة زر [°'''] لكتابة الزاوية بالدرجات والدقائق والثواني

* تذكر :

- مجموع قياس الزاويتين المتتامتين $= 90^\circ$
- مجموع قياس الزاويتين المتكاملتين $= 180^\circ$
- مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة $= 180^\circ$
- في نظرية فيثاغورث



لو عايز طول الوتر

ربع اجمع ربع اجذر

$أج = \sqrt{(أب)^2 + (بج)^2}$

ضلع عادي ربع اطرح ربع اجذر

$بج = \sqrt{(أج)^2 - (أب)^2}$

⇐ النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة :

① جيب الزاوية "sin"

$جا = \frac{مقابل}{وتر}$

$جاج = \frac{أب}{أج}$

$جاأ = \frac{بج}{أج}$

* الوتر ثابت والمقابل والمجاور يتغيران بتغير الزاوية

② جيب تمام الزاوية cos

$جتا = \frac{مجاور}{وتر}$

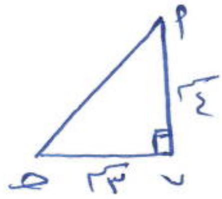
$جتاج = \frac{بج}{أج}$ ، $جتاأ = \frac{أب}{أج}$

③ ظل الزاوية tan

$ظا = \frac{مقابل}{مجاور}$ ، $ظا = \frac{جا}{جتا}$

مثال①: △أبج قائم في ب ، أب = ٤سم ، بج = ٣سم أوجد النسب المثلثية للزاويتين أ ، ج

الحل



وتر

$أج = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = 5$ سم

جاأ =

جتاأ =

ظاأ =

جاج =

جتاج =

ظاج =

⇐ إذا كان $ق(\hat{أ}) + ق(\hat{ج}) = 90^\circ$

فإن جاأ = جتاج ، جتاأ = جاج

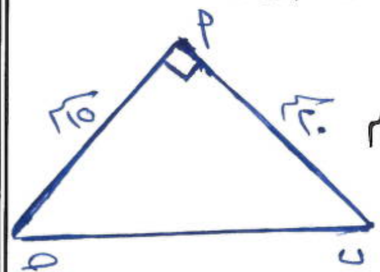
والعكس صحيح

مثال①: في الشكل المقابل:

ق(∠أ) = ٩٠°

أج = ١٥سم ، أب = ٢٠سم

أثبت أن



جتاج جتاب − جاج جاب = صفر

الحل

وتر ← ربع اجمع ربع اجذر

ب ج = $\sqrt{(٢٠)^2 + (١٥)^2}$ = $\sqrt{٦٢٥}$ = ٢٥سم

جتاج = $\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$ = $\frac{\text{أج}}{\text{ب ج}}$ = $\frac{١٥}{٢٥}$

جتاب = $\frac{\text{أب}}{\text{ب ج}}$ = $\frac{٢٠}{٢٥}$

جاج = $\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$ = $\frac{\text{أب}}{\text{ب ج}}$ = $\frac{٢٠}{٢٥}$

جاب = $\frac{١٥}{٢٥}$

المقدار = جتاج جتاب − جاج جاب

= $\frac{١٥}{٢٥} \times \frac{٢٠}{٢٥} - \frac{٢٠}{٢٥} \times \frac{١٥}{٢٥}$

= $\frac{٣٠٠}{٦٢٥} - \frac{٣٠٠}{٦٢٥}$ = صفر

مثال③ أب ج مثلث قائم في ب، إذا كان ٢أب = $\sqrt{٣}$ أج فأوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية ج

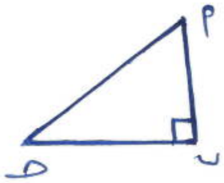
الحل

مثال④ △أب ج قائم في ب ، جاأ = ٠٫٦

أوجد قيمة

جاأ جتاج + جتاأ جاج

الحل



جاأ = $\frac{٦}{١٠}$ $\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$

مثال⑤: إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متكاملتين ٣ : ٥ فأوجد القياس الستيني لكل منهما

الحل

نفرض أن الزاويتين ٣س ، ٥س

٣س + ٥س = ١٨٠

٨س = ١٨٠ ⇐ س = $\frac{١٨٠}{٨}$

س = ٢٢٫٥

قياس الزاوية الأولى = ٣س = ٣ × ٢٢٫٥

= $\boxed{٥٥٠٥}$ = ٦٧° ٣٠'

قياس الزاوية الثانية = ٥س = ٥ × ٢٢٫٥

= $\boxed{٥٥٠٥}$ = ١١٢° ٣٠'

مثال⑤: إذا كانت النسبة بين قياسات الزوايا الداخلة لمثلث هي ٣ : ٤ : ٧ فأوجد القياس الستيني لكل زاوية

الحل

مثال⑦: س ص ع مثلث قائم في ع ، س ع = ٢٤ ، س ص = ٢٥ سم أوجد قيمة كل من:

① ظا س × ظا ص ② جا س + جا ص

الحل

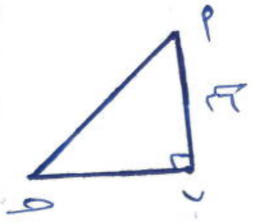
مثال⑥: في الشكل المقابل:

أ ب هـ مثلث قائم في ب

أ ب = ٣٦ ، ظا هـ = $\frac{٣}{٤}$

أوجد: ① طول ب هـ ، أ هـ

② جا أ + جتا أ



الحل

أكمل:

① إذا كان س ، ص زاويتين متتامتين وكان جا س = $\frac{٣}{٥}$ فإن جتا ص = ...

② لأي زاويتين حادتين، إذا كان جا أ = جتا ب فإن ق(أ) + ق(ب) = ...

③ إذا كان جا ٧٠ = جتا س فإن س = ...

④ في Δ أ ب ج إذا كان ق(أ) = ٨٥° ، جا ب = جتا ب فإن ق(ج) = ...

⑤ إذا كان جا س = جتا ٢س فإن س = ...

النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

	30°	60°	45°
جا	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
جتا	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
ظا	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	1

* أكمل:

① جتا 60° + جا 30° = ...

② ٤ جتا 30° ظا 60° = ...

③ جا 30° جتا 30° + جا^2 60° = ...

④ إذا كان △ أ ب جـ قائم في ب ومتساوي الساقين فإن ظا أ = ...

⑤ ظا^2 60° + جتا 60° − ظا 45° = ...

مثال① بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت كلاً مما يأتي

① جا 60° = ٢ جا 30° جتا 30°

② جتا 60° = ٢ جتا^2 30° − ١

الحل

③ جتا^2 60° = ٥ جا^2 30° − ظا^2 45°

الحل

مثال② أوجد قيمة س إذا كان

ظا س = ٤ جا 30° جتا 60°

الحل

ظا س = ٤ × $\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{2}$ = ٤ × $\frac{1}{4}$ = ١

∵ ظا س = ١ ∴ س = ٤٥

مثال③ إذا كان جا س = جا 60° جتا 30° − جتا 60° جا 30°

فأوجد قيمة س حيث س زاوية حادة

الحل

جا س = $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

= $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

∵ جا س = $\frac{1}{2}$ عكس عالآلة

∴ ق(س) = 30° shift sin $\frac{1}{2}$ =

أ / محمد ربيع
01158509989

مثال ⑪: أوجد قيمة س إذا كان
ظا س = ٤ جا ٣٠° جتا ٦٠° حيث
٠° < س < ٩٠°

الحل

⇐ أكمل:

① إذا كانت جتا س = $\frac{1}{2}$ حيث س زاوية حادة فإن ق(∠س) = ...

② إذا كان جا س = $\frac{1}{2}$ فإن س = ...

③ إذا كانت جتا س = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ حيث س زاوية حادة فإن جا² س = ...

④ إذا كان ظا ٣س = $\sqrt{3}$ حيث ٣س زاوية حادة فإن ق(∠س) = ...

④ إذا كان جتا (س + ١٠°) = $\frac{1}{2}$ حيث (س + ١٠°) زاوية حادة فإن س = ...

⑤ إذا كان ظا (٢س − ٥) = ١ حيث س زاوية حادة فإن س = ...

⑥ إذا كان جا(س + ٥°) = $\frac{1}{2}$ حيث (س + ٥) قياس زاوية حادة فإن ظا(س + ٥°) = ...

⑦ إذا كان ظا س = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ فإن ظا² س = ...

⑧ إذا كان جتا $\frac{س}{٢}$ = $\frac{1}{2}$ فإن س = ...

⇐ إيجاد قياس الزاوية إذا علمت إحدى النسب المثلثية لها

* إذا كان جا هـ = ٠,٩ فإن ق(هـ) =

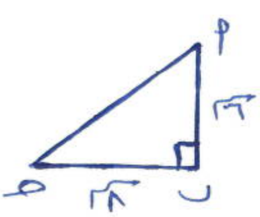
عالآلة

shift sin 0.9 = $\boxed{}$

* إذا كانت جتا ن = ٠,٧١٥٢ فإن ق(ن) = ٤٤° ٢٠' ٢٥"

shift Cos 0.7152 = $\boxed{}$

- في الشكل المقابل:



ق(ب) = ٩٠°

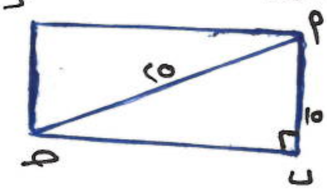
أ ب = ٣٦ ، ب هـ = ٢٨

أوجد ق(هـ)

الحل

تمارين على حساب △△

مثال ① في الشكل المقابل:



أ ب جـ د مستطيل

أب = ١٥سم ، أجـ = ٢٥سم

أوجد

① ق(∠ أجـب)

② مساحة المستطيل أ ب جـ د

الحل

مثال ② أ ب جـ د شبه منحرف متساوي الساقين فيه $\overline{\text{أد}}$ // $\overline{\text{بجـ}}$ ، أد = ٤سم

أب = ٥سم ، بجـ = ١٢سم أثبت أن

$$\frac{\text{٥ طاب جتاجـ}}{\text{جا}^2\text{جـ} + \text{جتا}^2\text{ب}} = ٣$$

الحل

مثال ③

أ ب جـ د شبه منحرف فيه $\overline{\text{أد}}$ // $\overline{\text{بجـ}}$

ق(∠ب) = ٩٠° ، أب = ٣سم ، أد = ٦سم

بجـ = ١٠سم أثبت أن

جتا(∠ دجـب) − ظا(∠ أجـب) = $\frac{1}{2}$

الحل

مثال ④ سلم $\overline{أب}$ طوله ٦ أمتار يستند طرفه العلوي أ على حائط رأسي وطرفه ب على أرض أفقية فإذا كانت جـ هي مسقط نقطة أ على سطح الأرض وكان زاوية ميل السلم على سطح الأرض ٦٠° فأوجد طول $\overline{أجـ}$

الحل

مثال ⑤: بسبب الرياح كُسر الجزء العلوي لشجرة فصنع مع الأرض زاوية قياسها ٦٠°، إذا كانت نقطة تلاقي قمة الشجرة بالأرض تبعد عن قاعدة الشجرة مسافة ٤ أمتار، أوجد طول الشجرة لأقرب متر

الحل

البُعد بين نقطتين

- إذا كانت أ(س١ ، ص١) ، ب(س٢ ، ص٢)

فإن أب = $\sqrt{(س١ - س٢)^2 + (ص١ - ص٢)^2}$

* إذا كانت أ(٢، ٣) ، ب(١، ٤)

فإن أب = $\sqrt{(٢-١)^2 + (٣-٤)^2}$

= $\sqrt{١+١}$ = $\sqrt{٢}$ وحدة طول

* إذا كانت أ(٢، ٥) ، ب(−١، ١) فإن

أب = ... $\sqrt{(٢+١)^2 + (٥-١)^2}$

= $\sqrt{(\text{أول غير إشارة أول})^2 + (\text{ثاني غير إشارة ثاني})^2}$

= $\sqrt{٩+١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدة طول

- بعد النقطة (س، ص) عن نقطة الأصل = $\sqrt{س^2 + ص^2}$

مثال: بعد النقطة (٣، ٤) عن نقطة الأصل = ... $\sqrt{٣^2 + ٤^2}$

= $\sqrt{٩+١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدة طول

- بعد النقطة (س، ص) عن محور السينات = |ص|

- بعد النقطة (س، ص) عن محور الصادات = |س|

مثال: بعد النقطة (−٣، ٤) عن محور الصادات = |−٣| = ٣

- بعد النقطة (−٣، ٤) عن محور السينات = ... = |٤| = ٤

ملاحظات:

* لتحديد نوع المثلث بالنسبة لزواياه نوجد أب ، ب جـ ، أجـ بفرض أن أكبر ضلع هو أجـ إذا كان:

① $(أجـ)^2 > (أب)^2 + (ب جـ)^2$

∴ △ منفرج الزاوية في ب

② $(أجـ)^2 = (أب)^2 + (ب جـ)^2$

∴ △ قائم الزاوية في ب

③ $(أجـ)^2 < (أب)^2 + (ب جـ)^2$

∴ △ حاد الزوايا

* مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × ع

ارتفاع

* لإثبات أن ثلاث نقط أ ، ب ، جـ تقع على دائرة مركزها م نثبت أن

م أ = م ب = م جـ = نق

محيط الدائرة = ٢ π نق

مساحة الدائرة = π نق²

* مثال① أثبت أن المثلث الذي رؤوسه النقط أ(٣، ٣) ، ب(٥، ٩) ، جـ(−١، ٧) متساوي الساقين

الحل

أب = $\sqrt{(٣-٥)^2 + (٣-٩)^2}$ = $\sqrt{٤٠}$ وحدة طول

ب جـ = $\sqrt{(٥+١)^2 + (٩-٧)^2}$ = $\sqrt{٤٠}$ وحدة طول

$أح = \sqrt{(٣+١)^٢ + (٣-٧)^٢} = \sqrt{٣٢}$ وحدة طول

∴ أب = ب ح

∴ △ أ ب ح متساوي الساقين

مثال: أثبت أن المثلث الذي رؤوسه النقط أ(٥،−٥) ، ب(−١،٧) ، ح(٥،١٤) قائم الزاوية في ب ثم أوجد مساحته

الحل

مثال: أثبت أن النقط أ(−٢،٧) ، ب(−٣،٤) ، ح(١،١٦) تقع على استقامة واحدة

الحل

فكرة الحل هنجيب ← أب ، ب ح ، أح

ونثبت أن الكبير طول = مجموع الاتنين الباقيين

* يمكن الحل عن طريق الميل

- - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - -

مثال: أثبت أن النقط أ(٣،−١) ، ب(−٤،٦) ، ح(٢،−٢) تقع على دائرة واحدة مركزها م(−١،٢) ثم أوجد محيط الدائرة (π = ٣,١٤)

الحل

$أم = \sqrt{(٣+١)^٢ + (-١-٢)^٢} = \sqrt{١٦+٩}$

$= \sqrt{٢٥} = ٥$ وحدة طول

$ب م = \sqrt{(-٤+١)^٢ + (٦-٢)^٢}$

$= \sqrt{٩+١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$ وحدة طول

$ح م = \sqrt{(٢+١)^٢ + (-٢-٢)^٢}$

$= \sqrt{٩+١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$ وحدة طول

∴ أم = ب م = ح م = نق = ٥

∴ النقط أ ، ب ، ح تقع على دائرة واحدة مركزها م

محيط الدائرة $= ٢ \pi$ نق $= ٢ \times ٣,١٤ \times ٥$

$= ٣١,٤$ وحدة طول

مثال: إذا كان البعد بين النقطتين (أ،٧) ، (−٢،٣) يساوي ٥ فأوجد أ

الحل

$\sqrt{(أ+٢)^٢ + (٧-٣)^٢} = ٥$

بالتربيع $\left(\sqrt{(أ+٢)^٢ + ١٦}\right)^٢ = (٥)^٢$

$(أ+٢)^٢ + ١٦ = ٢٥$

$(أ+٢)^٢ = ٢٥ - ١٦ = ٩$

$(أ+٢)^٢ = ٩$ ⟸ بأخذ $\sqrt{}$

$\sqrt{(أ+٢)^٢} = \pm\sqrt{٩}$ ⟸ $أ+٢ = \pm ٣$

$أ + ٢ = ٣$

$أ = ٣ - ٢$

$أ = ١$

$أ + ٢ = -٣$

$أ = -٣ - ٢$

$أ = -٥$

⟸ ملاحظات:

① لإثبات أن الشكل أ ب ج د يمثل متوازي أضلاع

نوجد ٤ أطوال أب ، ب ج ، ج د ، د أ

ونثبت أن أب = ج د ، ب ج = د أ

② لإثبات أن الشكل أ ب ج د معين

نوجد ٤ أطوال أب ، ب ج ، ج د ، د أ

ونثبت أن

أب = ب ج = ج د = د أ

لاحظ

مساحة المعين = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولي قطريه

= $\frac{1}{2}$ × أ ج × ب د

③ لإثبات أن الشكل أ ب ج د مستطيل

نوجد ٤ أطوال أب ، ب ج ، ج د ، د أ

والقطران أ ج ، ب د ونثبت أن

أب = ج د ، ب ج = د أ

أ ج = ب د (القطران)

④ لإثبات أن الشكل أ ب ج د مربع

نوجد ٤ أضلاع أب ، ب ج ، ج د ، د أ

والقطران أ ج ، ب د ونثبت أن

أب = ب ج = ج د = د أ

، أ ج = ب د

مثال①: أثبت أن النقط أ(−١، ١) ، ب(٠، ٥) ، ج(٥، ٦) ، د(٤، ٢) تمثل رؤوس متوازي أضلاع

الحل

مثال②: أثبت أن النقط أ(٥، ٣) ، ب(٦، −٢) ، ج(١، −١) ، د(٠، ٤) تمثل رؤوس معين ثم أوجد مساحته

الحل

مثال③: أثبت أن النقط أ(٣،٣) ، ب(٠،٣) ، ج(٠،٠) ، د(٣،٠) تمثل رؤوس مربع

الحل

مثال④ أثبت أن النقط أ(٠،١) ب(٤،٥) ، ج(١،٨) ، د(-٣،٤) تمثل رؤوس مستطيل

الحل

إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة

إذا كان أ(س١ ، ص١) ، ب(س٢ ، ص٢)

فإن منتصف $\overline{أب}$ = $\left(\frac{س١+س٢}{٢} ، \frac{ص١+ص٢}{٢}\right)$

مثال١ : إذا كانت أ(٣ ، ٤) ، ب(١ ، ٢)

فإن منتصف $\overline{أب}$ = $\left(\frac{٣+١}{٢} ، \frac{٤+٢}{٢}\right)$

= (٢ ، ٣)

* إذا كانت أ(٥ ، ٧) ، ب(-٣ ، ١)

فإن منتصف $\overline{أب}$ هو $\left(\frac{٥-٣}{٢} ، \frac{٧+١}{٢}\right)$

= (١ ، ٤)

ملاحظة

* إذا كان $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م

فإن مركز الدائرة م هو منتصف $\overline{أب}$

مثال٢ : إذا كان أب قطر في الدائرة حيث أ(٣ ، -٥) ، ب(٥ ، ١) فإن مركز الدائرة هو ...

مثال٤ : إذا كانت جـ(٦ ، -٤) هي منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(٥ ، -٣) فأوجد احداثي نقطة ب

الحل

نفرض أن ب(س ، ص)

∵ جـ منتصف أب

(٦ ، -٤) = $\left(\frac{٥+س}{٢} ، \frac{-٣+ص}{٢}\right)$

$\frac{٥+س}{٢} = ٦$

٥ + س = ١٢

س = ١٢ - ٥

س = ٧

$\frac{-٣+ص}{٢} = -٤$

-٣ + ص = -٨

ص = -٨ + ٣

ص = -٥

∴ ب (٧ ، -٥)

يوجد حل آخر

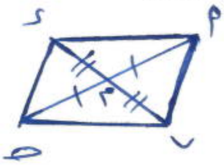
مثال٣ : إذا كانت جـ(١ ، -٤) هي منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(٤ ، -٢) فأوجد احداثي ب

الحل

مثال٥ : إذا كانت جـ(٤ ، ٦) هي منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(س ، ٣) ، ب(-٦ ، ص) فأوجد قيمة س ، ص

الحل

خلي بالك :
في متوازي الأضلاع والمعين
والمستطيل والمربع القطران
ينصف كلاً منهما الآخر



منتصف أجـ = منتصف ب د

مثال①: أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه
أ(٣، ٢) ، ب(٤، -٥) ، جـ(٠، -٣)
أوجد احداثي نقطة د

الحل

نفرض أن د(س، ص)
∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع
∴ القطران ينصف كلاً منهما الآخر
منتصف أجـ = منتصف ب د

((٣+٠)/٢ ، (٢-٣)/٢) = ((٤+س)/٢ ، (-٥+ص)/٢)

(٣+٠)/٢ = (٤+س)/٢
٣ = ٤ + س
٤ + س = ٣
س = ٣ - ٤
س = -١

(٢-٣)/٢ = (-٥+ص)/٢
٢-٣ = -٥+ص
-١ = -٥+ص
-٥+ص = -١
ص = -١+٥
ص = ٤

∴ د(-١، ٤)

مثال②: أب قطر في دائرة مركزها م فإذا
كانت ب(٨، ١١) ، م(٥، ٧) فأوجد
① إحداثي نقطة م
② محيط الدائرة حيث π = ٣,١٤

الحل

أكمل :
① إذا كانت نقطة الأصل هي منتصف القطعة المستقيمة أب حيث أ(٥، -٢) فإن النقطة ب هي ---

② إذا كان محور السينات ينصف أب حيث أ(٣، ٢) ، ب(-٢، ص) فإن ص = ---

ميل الخط المستقيم

إذا كان أ(س١، ص١)، ب(س٢، ص٢)

فإن ميل $\overline{أب}$ = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

$\frac{\text{ثاني غير إشارة ثاني}}{\text{أول غير إشارة أول}}$

مثال: إذا كانت أ(٧، ٢)، ب(٥، −١)
فإن ميل أب = ... = $\frac{٢+١}{٧-٥} = \frac{٣}{٢}$

ميل الخط المستقيم = ظل الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

$\boxed{م = ظا هـ}$

مثال: أوجد ميل المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات أكمل

م = ظا ٤٥ = ١

---

* ميل المستقيم الموازي لمحور السينات = صفر

* ميل المستقيم الموازي لمحور الصادات = $\frac{١}{صفر}$ (غير معرف)

العلاقة بين ميلي المستقيمين المتوازيين:

إذا كان ل١ // ل٢ فإن

$\boxed{م_١ = م_٢}$ والعكس صحيح

إذا كان م١ = م٢ فإن ل١ // ل٢

* إذا كان $\overline{أب}$ // $\overline{جـ د}$ وكان ميل $\overline{أب}$ = $\frac{٣}{٥}$ فإن ميل $\overline{جـ د}$ = ...

* المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٣}{٥}$ يكونان ...

العلاقة بين ميلي المستقيمين المتعامدين:

إذا كان ل١ ⊥ ل٢ فإن

$\boxed{م_١ \times م_٢ = -١}$ والعكس صحيح

إذا كان م١ × م٢ = −١ فإن ل١ ⊥ ل٢

* إذا كان $\overline{أب}$ ⊥ $\overline{جـ د}$ وكان ميل $\overline{أب}$ = $\frac{٣}{٢}$ فإن ميل $\overline{جـ د}$ = ...

* إذا كان ل١ ⊥ ل٢ وكان م١ = ٣ فإن م٢ = ...

مثال ⑫: أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٢، -١)، (٦، ٣) يوازي المستقيم الذي يصنع زاوية موجبة قياسها ٤٥° مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

الحل

$$م_١ = \frac{-١ - ٣}{٢ - ٦} = \frac{-٤}{-٤} = ١$$

$$م_٢ = ظا ٤٥° = ١$$

∵ $م_١ = م_٢$ ∴ $ل_١ \parallel ل_٢$

مثال ⑬: أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٤، $٣\sqrt{٣}$)، (٥، $٢\sqrt{٣}$) عمودي على المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٣٠°

الحل

$$م_١ = \frac{٣\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣}}{٤ - ٥} = \frac{\sqrt{٣}}{-١} = -\sqrt{٣}$$

$$م_٢ = ظا ٣٠ = \frac{١}{\sqrt{٣}}$$

$$م_١ \times م_٢ = -\sqrt{٣} \times \frac{١}{\sqrt{٣}} = -١$$

∴ $ل_١ \perp ل_٢$

مثال ⑭: أثبت أن النقط أ(١، ١)، ب(٢، ٣)، جـ(٠، -١) تقع على استقامة واحدة

الحل

$$ميل \overline{أب} = \frac{١ - ٣}{١ - ٢} = \frac{-٢}{-١} = ٢$$

$$ميل \overline{بجـ} = \frac{٣ + ١}{٢ - ٠} = \frac{٤}{٢} = ٢$$

∵ ميل $\overline{أب}$ = ميل $\overline{بجـ}$، ب نقطة مشتركة

∴ النقط أ، ب، جـ تقع على استقامة واحدة

مثال ⑮: إذا كانت النقط (٠، ١)، (أ، ٣)، (٢، ٥) تقع على استقامة واحدة فأوجد قيمة أ

الحل

ميل المستقيم المار بالنقطتين الأولى والثانية = ميل المستقيم المار بالنقطتين الثانية والثالثة

$$\frac{١ - ٣}{٠ - أ} = \frac{٣ - ٥}{أ - ٢}$$

$$\frac{\cancel{-٢}}{-أ} = \frac{\cancel{-٢}}{أ - ٢}$$

$$-أ = أ - ٢ \Leftarrow -أ - أ = -٢$$

$$-٢أ = -٢ \leftarrow \boxed{أ = ١}$$

مثال ⑯: إذا كان المستقيم $ل_١$ يمر بالنقطتين (٣، ١)، (٢، ك) والمستقيم $ل_٢$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥° أوجد قيمة ك إذا كان المستقيمان:

① متوازيين ② متعامدين

الحل

$$م_١ = \frac{١ - ك}{٣ - ٢} = \frac{١ - ك}{١} = ١ - ك$$

$$م_٢ = ظا ٤٥ = ١$$

أولاً: المستقيمان متوازيين

∵ $م_١ = م_٢$

$$١ - ك = ١ \Leftarrow -ك = ١ - ١$$

$-ك = صفر$ ∴ ك = صفر

ثانياً المستقيمان متعامدان

$\because$ م$_1$ × م$_2$ = -١

(١ - ك) × ١ = -١

١ - ك = -١ $\Leftarrow$ -ك = -١ -١

-ك = -٢ $\Leftarrow$ $\boxed{ك = ٢}$

مثال ⑥ إذا كان المثلث الذى رؤوسه النقط أ(٣، -١) ، ب(س، ٣) ، جـ(٥، ٣) قائم الزاوية فى أ فأوجد قيمة س

الحل

$\because$ Δ قائم فى أ $\therefore$ $\overline{أب} \perp \overline{أجـ}$

$\therefore$ ميل $\overline{أب}$ × ميل $\overline{أجـ}$ = -١

$$\frac{-١-٣}{٣-س} \times \frac{-١-٣}{٣-٥} = -١$$

$$\frac{-٤}{٣-س} \times \frac{\cancel{-}٤}{\cancel{-}٢} = -١$$

$$\frac{-٤}{٣-س} \times \frac{٢}{١} = \cancel{-}١$$

$$\frac{٨}{٣-س} = ١$$

٣ - س = ٨ $\Leftarrow$ -س = ٨ - ٣ = ٥

$\boxed{س = -٥}$

مثال ⑦: إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ // محور الصادات حيث أ(س، ٧) ، ب(٣، ٥) فأوجد قيمة س

الحل

مثال ⑧: أثبت أن النقط أ(٩، -٢) ، ب(٣، ٢) ، جـ(١، -١) ، د(٤، -٣) تمثل رؤوس شبه منحرف

الحل

ميل $\overline{أب}$ = $\frac{-٢-٢}{٩-٣}$ = $\frac{-٤}{٦}$ = $\frac{-٢}{٣}$

ميل $\overline{بجـ}$ = $\frac{٢+١}{٣-١}$ = $\frac{٣}{٢}$

ميل $\overline{جـد}$ = $\frac{-١+٣}{١-٤}$ = $\frac{٢}{-٣}$ = $\frac{-٢}{٣}$

ميل $\overline{أد}$ = $\frac{-٢+٣}{٩-٤}$ = $\frac{١}{٥}$

$\because$ ميل $\overline{أب}$ = ميل $\overline{جـد}$ $\therefore$ $\overline{أب}$ // $\overline{جـد}$

$\because$ ميل $\overline{بجـ}$ ≠ ميل $\overline{أد}$ $\therefore$ $\overline{بجـ}$ لا يوازى $\overline{أد}$

$\therefore$ النقط أ، ب، جـ، د تمثل رؤوس شبه منحرف

مثال ⑨: أثبت باستخدام الميل أن النقط أ(-١، ٣) ، ب(٥، ١) ، جـ(٦، ٤) ، د(٠، ٦) هى رؤوس مستطيل

الحل

معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات

⟸ الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم هي ص = م س + جـ

حيث م هي الميل

جـ هو الجزء المقطوع من محور الصادات

والمستقيم يمر بالنقطة (٠، جـ)

فمثلاً

① المستقيم الذي معادلته ص = ٣ س + ٥ ميله = --- ويقطع من محور الصادات جزءاً طوله --- ويمر بـ ---

② المستقيم الذي معادلته ص = س - ٣ ميله = --- ، جـ = --- ويمر بـ ---

③ المستقيم الذي معادلته ٢ص = ٤س - ١٠ ميله = --- ، جـ = ---

⟸ إذا كان المستقيم على الصورة أ س + ب ص + جـ = صفر

فإن الميل = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-\text{أ}}{\text{ب}}$

الجزء المقطوع من محور الصادات = $\left|\frac{-\text{جـ}}{\text{ب}}\right|$

فمثلاً

① المستقيم الذي معادلته ٣س + ٥ص + ٤ = ٠ ميله = ---

② المستقيم الذي معادلته ٢س - ٥ص + ٧ = ٠ ميله = --- بينما ميل العمودي عليه = ---

③ المستقيم الذي معادلته ٣س + ٥ص - ٢ = صفر ميل المستقيم الموازي له = ---

مثال①: أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله = ٣ ويقطع من محور الصادات جزءاً موجباً مقداره وحدتين

الحل

ص = م س + جـ

ص = ٣ س + ٢

⟸ ملاحظات:

① معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل هي ص = م س يعني جـ = صفر

② معادلة المستقيم الموازي لمحور السينات ويمر بالنقطة (٢، ٣) هي ص = ٣

③ معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات ويمر بالنقطة (٢، ٣) هي س = ٢

④ معادلة محور السينات هي ص = ٠

⑤ معادلة محور الصادات هي س = ٠

الحل:

① معادلة المستقيم الموازي لمحور السينات ويمر بالنقطة (٥، -٤) هي ...

② معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات ويمر بالنقطة (-١، ٧) هي ...

③ معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل وميله = ٢ هي ...

مثال④: أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (٢، -١)، (١، ١)

الحل

الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم هي ص = م س + جـ

م = (-١ - ١) / (٢ - ١) = -٢ / ١ = -٢

ص = -٢ س + جـ   عوض بـ (٢، -١)

-١ = -٢ × ٢ + جـ

-١ = -٤ + جـ ⟸ -١ + ٤ = جـ

جـ = ٣

$\boxed{\text{ص} = -٢\text{س} + ٣}$ معادلة المستقيم المطلوب

يمكن التعويض بالنقطة (١، ١) أيضاً

⟸ التعويض لا يكون إلا بالنقطة المار بها المستقيم

مثال⑤: أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٤، ٢) ، (-٢، -١) ثم أثبت أنه يمر بنقطة الأصل.

الحل

مثال⑥: أوجد معادلة الخط المستقيم العمودي على أب من نقطة منتصفه حيث أ(١، ٣) ، ب(٣، ٥)

الحل

مثال: أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٣، −٥) ويوازي المستقيم س + ٢ص − ٧ = صفر

الحل

ميل المستقيم المعطى = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-1}{2}$

∴ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{-1}{2}$

الصورة العامة لمعادلة المستقيم
ص = م س + جـ

ص = $\frac{-1}{2}$ س + جـ

عوض بالـ عشان نجيب جـ

نعوض بـ (٣، −٥)

$-5 = \frac{-1}{2} \times 3 +$ جـ

$-5 = \frac{-3}{2} +$ جـ ← $-5 + \frac{3}{2} =$ جـ

جـ = $\frac{-7}{2}$

∴ معادلة المستقيم المطلوب هي ص = $\frac{-1}{2}$ س $- \frac{7}{2}$

مثال: أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (١، ٤) وعمودي على المستقيم الذي معادلته ٢س + ٣ص − ٥ = صفر

الحل

مثال: أ(٢، ٣)، ب(٥، ٣)، جـ(٣، −١) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة أ وبمنتصف ب جـ

الحل

منتصف ب جـ = $\left(\frac{5+3}{2} ، \frac{3-1}{2}\right)$

= (٤، ١)

المستقيم مار بـ أ(٢، ٣)، (٤، ١)

الصورة العامة ⇐ ص = م س + جـ

م = $\frac{3-1}{2-4} = \frac{2}{-2} = -1$

ص = −س + جـ

عوض بـ أ(٢، ٣)

٣ = −٢ + جـ ← ٣ + ٢ = جـ

جـ = ٥

معادلة الخط المستقيم هي ص = −س + ٥

مثال: أ ب جـ مثلث فيه أ(١، ٢)، ب(٥، −٢)، جـ(٣، ٤)، د منتصف $\overline{أب}$، ارسم $\overrightarrow{ده}$ // $\overrightarrow{ب جـ}$ ويقطع $\overline{أجـ}$ في هـ أوجد
① طول $\overline{ده}$ ② معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ده}$

الحل

مثال ⑧ أوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ١$

الحل

مثال ⑨: أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يقطع من محوري الإحداثيات السيني والصادي جزئين موجبين طولاهما ٤ ، ٩ على الترتيب

الحل

مثال ⑩ أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله يساوي ميل الخط المستقيم $\frac{ص - ١}{س} = \frac{١}{٣}$ ويقطع ٣ وحدات من الاتجاه السالب لمحور الصادات

الحل

مثال ⑪: الجدول التالي يمثل علاقة خطية

س	١	٢	٣
ص = د(س)	١	٣	م

① أوجد معادلة الخط المستقيم

② أوجد طول الجزء المقطوع من محور الصادات

③ أوجد قيمة م

الحل

مثال ⑫ أ ب ج د مربع فيه أ(٥ ، ٤) ، ج(-١ ، ٦) أوجد معادلة $\overleftrightarrow{ب د}$

الحل

⇐ أكمل:

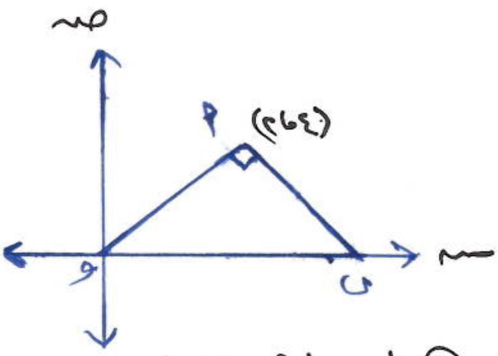
① المستقيم الذي معادلته ٢س − ٣ص + ٥ = ٠ يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها = ...

② المستقيم الذي معادلته ٢س − ٣ص − ٦ = ٠ يقطع من محور الصادات جزءاً طوله = ...

③ إذا كان المستقيمان ٣س − ٤ص − ٣ = ٠ ، ك ص + ٤س − ٨ = ٠ متعامدين فإن ك = ...

④ إذا كان المستقيمان س + ص = ٥ ، ك س + ٢ص = ٠ متوازيين فإن ك = ...

⇐ في الشكل المقابل:



أوجد ① إحداثي نقطة ب

② معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أ ب}$

الحل